ЭКЗАМЕНАЦИОННОЕ ЗАДАНИЕ

Математический анализ, третий семестр.
Лектор профессор В.А.Зорич, 2012/13 уч.год.

1. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}$ вещественнозначных функций, определённых, например, на отрезке $[0,1]$.

a. Какие виды сходимости последовательности функций Вы знаете?

b. Дайте определение каждой из них.

c. Какова связь между ними? (Докажите эту связь или приведите поясняющий пример, когда такой связи нет).

2. Дана 2π-периодическая функция f. Она тождественно равна нулю на интервале $]-\pi, 0[$ и $f(x) = 2x$ на отрезке $[0,\pi]$. Найдите сумму S стандартного тригонометрического ряда Фурье этой функции.

3. a. Известно разложение функции $(1+x)^{-1}$ в степенной ряд ("геометрическая прогрессия"). Получите отсюда степенное разложение функции $\ln(1+x)$ и обоснуйте ваши действия.

b. Каков радиус сходимости полученного ряда?

c. Сходится ли этот ряд при $x = 1$ и, если да, то будет ли его сумма равна $\ln 2$? Почему?

4. a. Известно, что спектральная функция (характеристика) p линейного прибора (оператора) A всюду отлична от нуля. Как, зная функцию p и полученный сигнал $g = \mathrm{A}f$, найти переданный сигнал f?

b. Пусть функция p такова: $p(\omega) \equiv 1$ при $|\omega| \leq 10$ и $p(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| > 10$. Пусть известен спектр $\hat{g}$ (преобразование Фурье) принятого сигнала g, а именно, $\hat{g}(\omega) \equiv 1$ при $|\omega| \leq 1$ и $\hat{g}(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| > 1$. Наконец, пусть известно, что входной сигнал f не содержит частот за пределами частот, пропускаемых прибором A (т.е. за пределами частот $|\omega| \leq 10$). Найдите входной сигнал f.

5. Объём n-мерного шара радиуса r в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ выражается формулой $V_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} r^n$.

a. Проверьте эту формулу в знакомых вам случаях, когда $n = 1, 2, 3$.

b. Найдите главный член асимптотики величины r_n радиуса n-мерного шара единичного объёма при $n \to +\infty$.